International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM)
ISSN 2367-7775 ©IJCDM
Volume 10, 2025, pp. 20-28
Received January 10, 2025. Published on-line April 11, 2025
web: http://www.journal-1.eu/
©The Author(s) This article is published with open access[1].

A Set of Coaxal Circles in Reference to a Triangle

Benjamin Lee Warren[a] [2]
University of Binghamton, Mathematics,
4400 Vestel Pkwy E, Binghamton, NY 13902
e-mail: warrenbenjamin52@yahoo.com
web: https://orcid.org/0000-0002-2829-6953

Mathematics Subject Classification (2010). 51N20.

1. Introduction

In [1] and [2], we introduced two sets of conyclic points. Here we will show that if we examine both sets of points at the same time along with the circumcenter of the points in [2], then we can find three other coaxal circles passing through them.

2. Results

Theorem 2.1. *Let A, B, and C be the vertices of a given triangle.*
Let D be the point on line AC, with $\angle CAB = \angle DAB$, such that $AD = AB$.
Let E be the point on line AB, with $\angle CAB = \angle CAE$, such that $AE = AC$.
Let F be the point on line BC, with $\angle CBA = \angle FBA$, such that $BF = AB$.
Let G be the point on line AB, with $\angle CBA = \angle CBG$, such that $BG = BC$.
Let H be the point on line BC, with $\angle ACB = \angle ACH$, such that $CH = AC$.
Let I be the point on line AC, with $\angle ACB = \angle ICB$, such that $CI = BC$.
Let M be the circumcenter of AGI.
Let N be the circumcenter of CDF.
Let O be the circumcenter of BEH.
Let P be the incenter of ABC.
Let Q be the centroid of CMO.
Let R be the centroid of BMN.
Let S be the centroid of ANO.
Let U be the centroid of CEG.

[1]This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License which permits any use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author(s) and the source are credited.
[2]Corresponding author

Let V be the centroid of BDI.
Let W be the centroid of AFH.
Let Z be $X(5886)$ (the circumcenter of UVW).
Then,
1. P, Q, U, and Z are concyclic,
2. P, R, V, and Z are concyclic, and
3. P, S, W, and Z are concyclic.

Proof. Without loss of generality, we will work in Cartesian coordinates.
A has coordinates $(0, 0)$.
B has coordinates $(1, 0)$.
C has coordinates (x_C, y_C).
D has coordinates $(\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}, \frac{y_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}})$.
E has coordinates $(\sqrt{x_C^2+y_C^2}, 0)$.
F has coordinates $(\frac{x_C-1}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+1, \frac{y_C}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})$.
G has coordinates $(1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}, 0)$.
H has coordinates $(x_C+\frac{(1-x_C)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}, y_C*(1-\frac{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}))$.
I has coordinates $(x_C*(1-\frac{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}), y_C*(1-\frac{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}))$.
M has coordinates $((1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})/2, -\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(-x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C})$.
N has coordinates $(\frac{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{2}, -\frac{(x_C-1)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}-x_C*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})-y_C^2}{2y_C})$.
O has coordinates $((1+\sqrt{x_C^2+y_C^2})/2, -\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C})$.
P has coordinates $(\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}, \frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})$.
Q has coordinates
$((x_C+(1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})/2+(1+\sqrt{x_C^2+y_C^2})/2)/3,$
$(y_C-\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(-x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C}-\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C})/3)$.
R has coordinates
$((1+(1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})/2+\frac{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{2})/3,$
$(-\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(-x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C}-\frac{(x_C-1)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}-x_C*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})-y_C^2}{2y_C})/3)$.
S has coordinates
$((\frac{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{2}+(1+\sqrt{x_C^2+y_C^2})/2)/3,$
$(-\frac{(x_C-1)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}-x_C*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})-y_C^2}{2y_C}-\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C})/3)$.
U has coordinates $((x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})/3, y_C/3)$.
V has coordinates
$((1+\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}+x_C*(1-\frac{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}))/3, (\frac{y_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}+y_C*(1-\frac{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}))/3)$.
W has coordinates
$((\frac{x_C-1}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+1+x_C+\frac{(1-x_C)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})/3, (\frac{y_C}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+y_C*(1-\frac{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}))/3)$.
Z has coordinates
$((2/3)*(x_C+1)+((y_C^2+x_C^2)^{1/2}-(y_C^2+(x_C-1)^2)^{1/2}-2*x_C-2)/6, (2/3)*y_C-$
$((y_C^2+(x_C-1)^2)^{1/2}*((y_C^2+x_C^2)^{1/2}-x_C)+(x_C-1)*(y_C^2+x_C^2)^{1/2}+2*y_C^2)/(6*y_C))$.

1.Consider the circle whose equation is given by
$(x-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+(y-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2-((x_C/3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}/3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}/3+1/3-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+(y_C/3-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2)=0.$
We verify that P, Q, U, and Z lie on this circle since we calculate
$(\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2-((x_C/3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}/3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}/3+1/3-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+(y_C/3-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2)=0,$
$((x_C+(1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})/2+(1+\sqrt{x_C^2+y_C^2})/2)/3-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+((y_C-\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(-x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C}-\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C})/3-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2-((x_C/3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}/3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}/3+1/3-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+(y_C/3-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2)=0,$
$((x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})/3-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+(y_C/3-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2-((x_C/3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}/3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}/3+1/3-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+(y_C/3-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2)=0,$
and
$((2/3)*(x_C+1)+((y_C^2+x_C^2)^{1/2}-(y_C^2+(x_C-1)^2)^{1/2}-2*x_C-2)/6-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-$

$5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+((2/3)*y_C-((y_C^2+(x_C-1)^2)^{1/2}*((y_C^2+x_C^2)^{1/2}-x_C)+(x_C-1)*(y_C^2+x_C^2)^{1/2}+2*y_C^2)/(6*y_C)-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2-((x_C/3+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}/3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}/3+1/3-(-(5*x_C^2-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C*(x_C-1)^2+y_C^2*(4*x_C-1))-y_C^2*(2*x_C^2+10*x_C-7)-10*x_C^3+5*x_C^4+y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C-6)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-y_C^2+x_C*(5*x_C-5))-4*x_C^2+4*x_C^3))/(y_C^2*(24*x_C-12))))^2+(y_C/3-(((2*x_C-3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)-2*x_C+2*x_C^2+6*y_C^2)/(12*y_C)))^2) = 0$ as desired.

2. Consider the circle whose equation is given by
$(x-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(y-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2) = 0.$
We verify that P, R, V, and Z lie on this circle since we calculate
$(\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2) = 0,$
$((1+(1-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})/2+\frac{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{2})/3-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+$

$$11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+((-\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(-x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C}-\frac{(x_C-1)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}-x_C*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})-y_C^2}{2y_C})/3-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2)=0,$$

$$((1+\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}+x_C*(1-\frac{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}))/3-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+((\frac{y_C}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}+y_C*(1-\frac{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}))/3-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2)=0,$$

and

$$((2/3)*(x_C+1)+((y_C^2+x_C^2)^{1/2}-(y_C^2+(x_C-1)^2)^{1/2}-2*x_C-2)/6-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+((2/3)*y_C-((y_C^2+(x_C-1)^2)^{1/2}*((y_C^2+x_C^2)^{1/2}-x_C)+(x_C-1)*(y_C^2+x_C^2)^{1/2}+2*y_C^2)/(6*y_C)-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(-(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(5*x_C^3-5*x_C^4+3*y_C^4+4*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2+x_C*(x_C-1))-x_C*y_C^2*(2*x_C+7))-y_C^4*(5*x_C+6)+2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C^4-4*x_C^3+x_C^2*y_C^2+2*x_C^2+2*x_C*y_C^2-y_C^4)-5*x_C^3+10*x_C^4-5*x_C^5+x_C*y_C^2*(-10*x_C^2+4*x_C+11))/(12*y_C^2*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((y_C^2*(14*x_C^2-16*x_C+$$

$1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((3*x_C-1)*y_C^2+x_C*(3*x_C-4)*(x_C-1))+9*x_C^2-16*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(8*x_C+1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*y_C^2+x_C*(3*x_C-4))-11*x_C^2+8*x_C^3))/(12*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2))))^2)=0$ as desired.

3. Consider the circle whose equation is given by
$(x-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(y-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2)=0.$
We verify that P, S, W, and Z lie on this circle since we calculate
$(\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2)=0,$
$((\frac{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}-\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}{2}+(1+\sqrt{x_C^2+y_C^2})/2)/3-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+((-\frac{(x_C-1)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}-x_C*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})-y_C^2}{2y_C}-$

$\frac{x_C-x_C^2-y_C^2+(\sqrt{x_C^2+y_C^2})*(x_C-1+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2})}{2y_C})/3-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2)=0,$

$((\frac{x_C-1}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+1+x_C+\frac{(1-x_C)*\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}})/3-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+((\frac{y_C}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}+y_C*(1-\frac{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}))/3-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2)=0,$

and

$((2/3)*(x_C+1)+((y_C^2+x_C^2)^{1/2}-(y_C^2+(x_C-1)^2)^{1/2}-2*x_C-2)/6-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+((2/3)*y_C-((y_C^2+(x_C-1)^2)^{1/2}*((y_C^2+x_C^2)^{1/2}-x_C)+(x_C-1)*(y_C^2+x_C^2)^{1/2}+2*y_C^2)/(6*y_C)-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((\frac{x_C+\sqrt{x_C^2+y_C^2}}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-(((x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^2*(2*x_C^2-8*x_C+6)+4*x_C^2-8*x_C^3+4*x_C^4-2*y_C^4-4*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C-1)*(x_C^2-x_C+y_C^2))+y_C^4*(5*x_C+1)-5*x_C^2+15*x_C^3-15*x_C^4+5*x_C^5+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(-5*x_C^4+15*x_C^3-2*x_C^2*y_C^2-15*x_C^2+11*x_C*y_C^2+5*x_C+3*y_C^4-9*y_C^2)+y_C^2*(10*x_C^3-14*x_C^2+11*$

$x_C-7))/(12*y_C^2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(\frac{y_C}{1+\sqrt{x_C^2+y_C^2}+\sqrt{(x_C-1)^2+y_C^2}}-((2*x_C-y_C^2*(-14*x_C^2+12*x_C+1)+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(3*x_C-2)-(3*y_C^2+(3*x_C+1)*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))+3*x_C^2-12*x_C^3+7*x_C^4+7*y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(8*x_C-9)-13*x_C^2+8*x_C^3+3))/(12*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2)=0$ as desired.

□

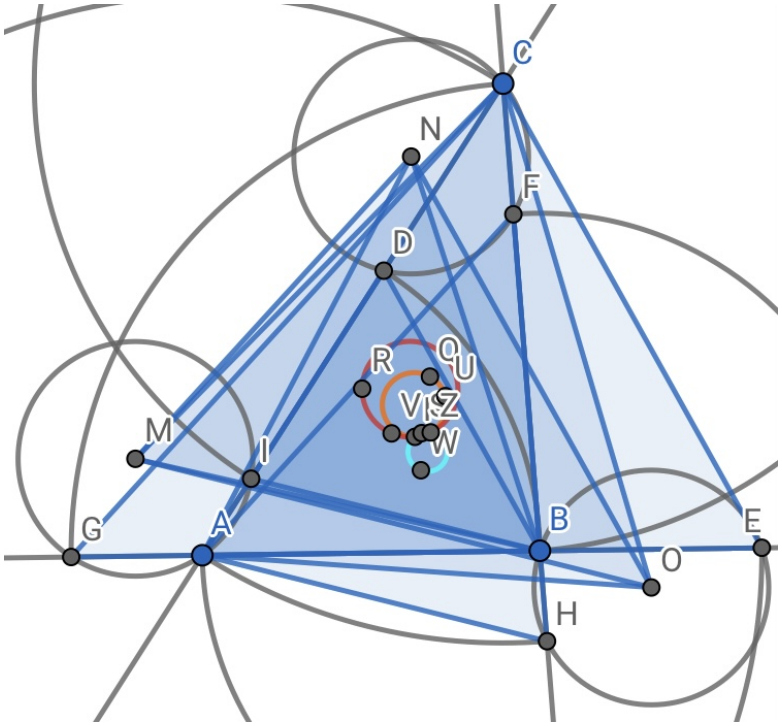

Figure 1. Illustration.

References

[1] Warren, B.L., "The Incenter Lies on a Circle", *International Journal of Computer Discovered Mathematics*, Vol. 9 (2024), pp. 498-501.

[2] Warren, B.L., "The Centroid of a Triangle Lies on a Twin Circle", *International Journal of Computer Discovered Mathematics*, Under Review.

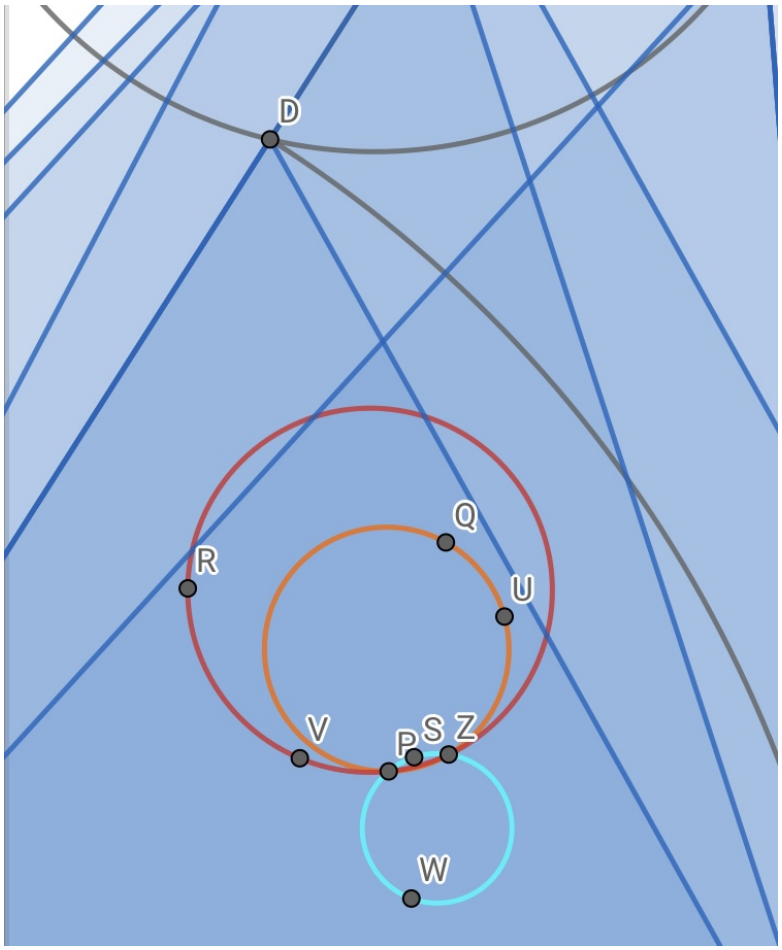

Figure 2. Illustration zoomed in.