International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM)
ISSN 2367-7775 ©IJCDM
Volume 10, 2025, pp. 195-200.
Received March 30, 2025. Published on-line July 16, 2025
web: http://www.journal-1.eu/
©The Author(s) This article is published with open access[1].

Coaxal Circles in the Context of Certain Parabolae

Benjamin Lee Warren[a] [2]
University of Binghamton, Mathematics,
4400 Vestel Pkwy E, Binghamton, NY 13902
e-mail: warrenbenjamin52@yahoo.com
web: https://orcid.org/0000-0002-2829-6953

Mathematics Subject Classification (2010). 51N20.

1. Introduction

We construct the parabolae whose foci are the vertices of a triangle and whose directrices are the corresponding sides and we demonstrate the existence of three nontrivial coaxal circles that arise in this context.

2. Results

Theorem 2.1. *Let A, B, and C be the vertices of a given triangle.*
Let w_A be the parabola whose focus is A and whose directrix is line BC.
Define w_B and w_C cyclically.
Let w_A intersect lines AB and AC at A_B and A_C (which are each in between AB and AC respectively).
Define B_A, B_C, C_A, C_B cyclically.
Let A' and A'' respectively be the orthogonal projections of A on lines A_BA_C and BC.
Define B', B'', C', C'' cyclically.
Then circles $AA'A''$, $BB'B''$, and $CC'C''$ are coaxal and their radical axis is the line X_4X_9.

[1]This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License which permits any use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author(s) and the source are credited.
[2]Corresponding author

Proof. Without loss of generality, we will work in Cartesian coordinates.
A has coordinates $(0,0)$.
B has coordinates $(1,0)$.
C has coordinates (x_C, y_C).
w_A is given by the equation
$((y_C*(y_C+y*(x_C-1))+x*(x_C-1)^2)/(y_C^2+(x_C-1)^2)-x)^2+((y_C*(y*y_C+(x-1)*x_C-x+1))/(y_C^2+(x_C-1)^2)-y)^2-x^2-y^2=0$.
w_B is given by the equation
$((x_C*(x*x_C+y*y_C))/(x_C^2+y_C^2)-x)^2+((y_C*(x*x_C+y*y_C))/(x_C^2+y_C^2)-y)^2-(x-1)^2-y^2=0$.
w_C is given by the equation $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2-y^2=0$.
A_B has coordinates
$((y_C*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-y_C^2)/(x_C^2-2*x_C+1),0)$.
A_C has coordinates
$(-(x_C*y_C*(y_C-((x_C^2+y_C^2)*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1))^{1/2}))/(x_C^2-x_C+y_C^2)^2, -(y_C^2*(y_C-((x_C^2+y_C^2)*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1))^{1/2}))/(x_C^2-x_C+y_C^2)^2)$.
B_A has coordinates
$((x_C^2-y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+y_C^2)/x_C^2,0)$.
B_C has coordinates
$(1-(y_C*(x_C-1)*(y_C-((x_C^2+y_C^2)*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1))^{1/2}))/(x_C^2-x_C+y_C^2)^2, -(y_C^2*(y_C-((x_C^2+y_C^2)*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1))^{1/2}))/(x_C^2-x_C+y_C^2)^2)$.
C_A has coordinates
$((x_C^2*y_C-y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+y_C^3)/(x_C*y_C), (x_C^2*y_C-y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+y_C^3)/x_C^2)$.
C_B has coordinates
$(-(x_C+y_C*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C^2-y_C^2)/(x_C-1), (y_C*(x_C^2-y_C*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-2*x_C+y_C^2+1))/(x_C-1)^2)$.
A' has coordinates
$(-(y_C^5*(y_C-(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})*(x_C-1)^2*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})^2)/((y_C*(y_C-(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})*(x_C^2-x_C+y_C^2)^2-x_C*y_C*(x_C-1)^2*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))^2+y_C^4*(x_C-1)^4*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})^2), -(y_C^3*(y_C*(y_C-(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})*(x_C^2-x_C+y_C^2)^2-x_C*y_C*(x_C-1)^2*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))*(y_C-(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))/((y_C*(y_C-(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})*(x_C^2-x_C+y_C^2)^2-x_C*y_C*(x_C-1)^2*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))^2+y_C^4*(x_C-1)^4*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})^2))$.
B' has coordinates
$(((y_C*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C^2-x_C+y_C^2)^2+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))^2+x_C^2*y_C^4*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})^2*(x_C^2-y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+y_C^2))/((y_C*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C^2-x_C+y_C^2)^2+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))^2+x_C^4*y_C^4*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})^2), -(y_C^3*(y_C*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C^2-x_C+y_C^2)^2+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))/((y_C*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C^2-x_C+y_C^2)^2+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}))^2+x_C^4*y_C^4*(y_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})^2))$.
C' has coordinates
$((y_C^8*(16*x_C-8)-(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}*(y_C^7*(16*x_C-8)+y_C^5*(48*x_C^3-80*x_C^2+58*x_C-15)+2*x_C^2*y_C^3*(24*x_C^3-60*x_C^2+49*x_C-13)+16*x_C^4*y_C*(x_C-1)^3-2*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1)*(4*x_C^4-8*x_C^3+8*x_C^2*y_C^2+4*x_C^2-8*x_C*y_C^2+4*y_C^4+5*y_C^2))-$

$(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^7*(16*x_C-8)+y_C^5*(48*x_C^3-64*x_C^2+42*x_C-11)+16*x_C^3*y_C*(x_C-1)^4+2*x_C*y_C^3*(x_C-1)^2*(24*x_C^2-12*x_C+1))+64*x_C^5-256*x_C^6+384*x_C^7-256*x_C^8+64*x_C^9+y_C^6*(112*x_C^3-136*x_C^2+68*x_C-14)+x_C*y_C^4*(240*x_C^4-504*x_C^3+428*x_C^2-162*x_C+23)+8*x_C^3*y_C^2*(x_C-1)^2*(26*x_C^2-27*x_C+9))/(y_C^4*(192*x_C^4-384*x_C^3+336*x_C^2-144*x_C+25)+16*y_C^6*(2*x_C-1)^2+64*x_C^4-256*x_C^5+384*x_C^6-256*x_C^7+64*x_C^8+64*x_C^2*y_C^2*(x_C-1)^2*(3*x_C^2-3*x_C+1)), (y_C*(y_C^4*(144*x_C^4-288*x_C^3+248*x_C^2-104*x_C+20)-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(8*x_C^6-24*x_C^5+16*x_C^4*y_C^2+24*x_C^4-32*x_C^3*y_C^2-8*x_C^3+8*x_C^2*y_C^4+23*x_C^2*y_C^2-8*x_C*y_C^4-7*x_C*y_C^2+y_C^4)+2*y_C^5+x_C*y_C^3*(16*x_C^2-22*x_C+11)+16*x_C^3*y_C*(x_C-1)^2)+y_C^6*(48*x_C^2-48*x_C+14)+48*x_C^4-192*x_C^5+288*x_C^6-192*x_C^7+48*x_C^8+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(16*x_C^2*(x_C-1)^3+y_C^2*(-2*y_C^2+(x_C-1)*(16*x_C^2-10*x_C+5)))+2*x_C^2*y_C^2*(x_C-1)^2*(72*x_C^2-72*x_C+29)))/(y_C^4*(192*x_C^4-384*x_C^3+336*x_C^2-144*x_C+25)+16*y_C^6*(2*x_C-1)^2+64*x_C^4-256*x_C^5+384*x_C^6-256*x_C^7+64*x_C^8+64*x_C^2*y_C^2*(x_C-1)^2*(3*x_C^2-3*x_C+1))).$

A'' has coordinates $(y_C^2/(y_C^2+(x_C-1)^2), -((x_C-1)*y_C)/(y_C^2+(x_C-1)^2))$.

B'' has coordinates $(x_C^2/(y_C^2+x_C^2), (x_C*y_C)/(y_C^2+x_C^2))$.

C'' has coordinates $(x_C, 0)$.

Circle $AA'A''$ is given by the equation

$(x-((y_C^2+(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(y-(-(y_C*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(((y_C^2+(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((-(y_C*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2=0.$

Circle $BB'B''$ is given by the equation

$(x-((y_C^2-x_C*(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C+3))/(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-2))))^2+(y-(-(y_C*(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-2))))^2-(1-((y_C^2-x_C*(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C+3))/(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-2))))^2-((-(y_C*(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-2))))^2=0.$

Circle $CC'C''$ is given by the equation

$(x-(((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C+3*x_C^2+y_C^2)/(4*x_C-2)))^2+(y-y_C/2)^2-(x_C-(((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C+3*x_C^2+y_C^2)/(4*x_C-2)))^2-(y_C/2)^2=0.$

We subtract the second from the first to obtain $(x-((y_C^2+(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(y-(-(y_C*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(((y_C^2+(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((-(y_C*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2$

$-$

$((x-((y_C^2-x_C*(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C+3))/(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-2))))^2+(y-(-(y_C*(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-2))))^2-(1-((y_C^2-x_C*(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C+3))/(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-2))))^2-((-(y_C*(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-2))))^2)=0$

$\implies$

$x_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C+3*x*x_C+y*y_C-x_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C^2-x*y_C^2+x_C*y_C^2+x_C^3+x*x_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x*x_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+y*y_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+y*y_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*x_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*y_C^2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-y*y_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+2*x*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C*y*y_C-2*x_C*y*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x*x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2*y*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*x_C*y_C^2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^2*y*y_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}=0$

$\implies$

$y=-(x_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C+3*x*x_C-x_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C^2-x*y_C^2+x_C*y_C^2+x_C^3+x*x_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x*x_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*x_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*y_C^2*((x_C-1)^2+$

$y_C^2)^{1/2}+2*x*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x*x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*x_C*y_C^2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})/(y_C-y_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C*y_C+y_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+y_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^2*y_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})$.
Next, we subtract the third from the first two obtain
$(x-((y_C^2+(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(y-(-(y_C*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(((y_C^2+(x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2})*(x_C-1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((-(y_C*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*(x_C^2+y_C^2-1))))^2$
$-$
$((x-(((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C+3*x_C^2+y_C^2)/(4*x_C-2)))^2+(y-y_C/2)^2-(x_C-(((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C+3*x_C^2+y_C^2)/(4*x_C-2)))^2-(y_C/2)^2)=0$.
$\Longrightarrow$
$x*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C^3*y_C^2-3*x*x_C^3+3*x*x*x_C^4+x*y_C^4+x_C*y_C^2-x_C*y_C^4-y*y_C^3+x_C^3-x_C^5+2*x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C*y_C^2-x_C^2*y*y_C+2*x_C*y*y_C^3+2*x_C^3*y*y_C+4*x*x_C^2*y_C^2-x*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-3*x*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-y*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+2*x_C*y*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}=0$
$\Longrightarrow$
$y=(x*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C^3*y_C^2-3*x*x_C^3+3*x*x*x_C^4+x*y_C^4+x_C*y_C^2-x_C*y_C^4+x_C^3-x_C^5+2*x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C*y_C^2+4*x*x_C^2*y_C^2-x*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-3*x*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})/(y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2*y_C-2*x_C*y_C^3-2*x_C^3*y_C+y_C^3-2*x_C*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})$.
We then have that these are the same line since we calculate
$-(x_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-x_C+3*x*x_C-x_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C^2-x*y_C^2+x_C*y_C^2+x_C^3+x*x_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x*x_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*x_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+x_C*y_C^2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+2*x*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x*x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x*x_C*y_C^2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2})/(y_C-y_C^3*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C*y_C+y_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+y_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^2*y_C*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})$
$-$
$((x*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C^3*y_C^2-3*x*x_C^3+3*x*x_C^4+x*y_C^4+x_C*y_C^2-x_C*y_C^4+x_C^3-x_C^5+2*x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-3*x*x_C*y_C^2+4*x*x_C^2*y_C^2-x*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-3*x*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})/(y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2*y_C-2*x_C*y_C^3-2*x_C^3*y_C+y_C^3-2*x_C*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}))=0$
which confirms that these three circles are coaxal.
Now, the orthocenter has coordinates $(x_C, x_C*(1-x_C)/y_C)$.
The Spieker center has coordinates
$(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2),((y_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((y_C)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))$.
We verify that both of these points lie on the radical line of the three circles since

we calculate
$(x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C^3*y_C^2-3*x_C*x_C^3+3*x_C*x_C^4+x_C*y_C^4+x_C*y_C^2-x_C*y_C^4+x_C^3-x_C^5+2*x_C*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-3*x_C*x_C*y_C^2+4*x_C*x_C^2*y_C^2-x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-3*x_C*x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x_C*x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})/(y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2*y_C-2*x_C*y_C^3-2*x_C^3*y_C+y_C^3-2*x_C*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})-x_C*(1-x_C)/y_C=0$
and
$((((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-2*x_C^3*y_C^2-3*(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))x_C^3+3*(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))x_C^4+(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))y_C^4+x_C*y_C^2-x_C*y_C^4+x_C^3-x_C^5+2*(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-3*(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))x_C*y_C^2+4*(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))x_C^2*y_C^2-(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-3*(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))x_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}-x_C^3*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))x_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}+(((1/2)*(1/2)+(x_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((x_C+1)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2}-x_C*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2-2*x_C+y_C^2+1)^{1/2})/(y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+x_C^2*y_C-2*x_C*y_C^3-2*x_C^3*y_C+y_C^3-2*x_C*y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})-(((y_C/2)*((((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2})+((y_C)/2)*(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}))/(((x_C/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+(((x_C+1)/2-1/2)^2+(y_C/2)^2)^{1/2}+1/2))=0$
as desired. □

References

[1] Warren, B.L., "Tangents and a Parabola", *International Journal of Computer Discovered Mathematics*, under review.

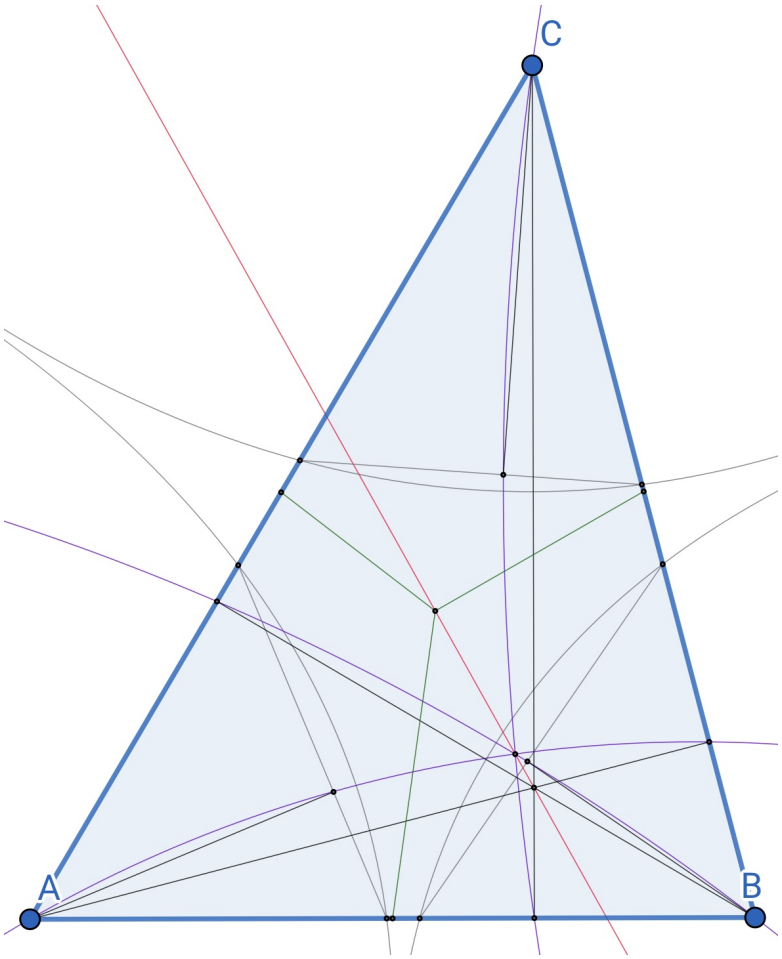

FIGURE 1. Illustration.