International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM)
ISSN 2367-7775 ©IJCDM
Volume 10, 2025, pp. 137-141.
Received February 25, 2025. Published on-line July 16, 2025
web: http://www.journal-1.eu/
©The Author(s) This article is published with open access[1].

Coaxal Circles and Triangles Homothetic to the Intouch Triangle about the Incenter

Benjamin Lee Warren[a] [2]
e-mail: warrenbenjamin52@yahoo.com
web: https://orcid.org/0000-0002-2829-6953

Mathematics Subject Classification (2010). 51N20.

1. Introduction

If we take a triangle which is homothetic with the intouch triangle about the incenter, then the circles that pass through the incenter and the corresponding vertices of that triangle and the original are coaxal. We provide a proof of this here.

2. Results

Theorem 2.1. *Let A, B, and C be the vertices of a given triangle.*
Let D be the incenter of ABC.
Let E, F, and G be the vertices of the intouch triangle of ABC on sides AB, AC, and BC respectively.
Let H, I, and J be the vertices of a triangle homothetic to the intouch triangle of ABC about D on lines DE, DF, and DG respectively.
Then circles ADJ, BDI, and CDH are coaxal.

Proof. Without loss of generality, we will work in Cartesian coordinates.
A has coordinates $(0, 0)$.
B has coordinates $(1, 0)$.
C has coordinates (x_C, y_C).
D has coordinates
$((x_C + (x_C^2 + y_C^2)^{1/2})/((x_C^2 + y_C^2)^{1/2} + ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2} + 1), y_C/((x_C^2 + y_C^2)^{1/2} + ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2} + 1))$.
E has coordinates $((x_C + (x_C^2 + y_C^2)^{1/2})/((x_C^2 + y_C^2)^{1/2} + ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2} + 1), 0)$.

[1]This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License which permits any use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author(s) and the source are credited.
[2]Corresponding author

F has coordinates
$((x_C * ((x_C^2 + y_C^2)^{1/2} - ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2} + 1))/(2 * (x_C^2 + y_C^2)^{1/2}), (y_C * ((x_C^2 + y_C^2)^{1/2} - ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2} + 1))/(2 * (x_C^2 + y_C^2)^{1/2}))$.
G has coordinates
$(x_C/2 - ((x_C^2 + y_C^2)^{1/2} * (x_C - 1) - x_C + 1)/(2 * ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2}) + 1/2, y_C/(2 * ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2}) - (y_C * ((x_C^2 + y_C^2)^{1/2}/((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2} - 1))/2)$.
H has coordinates $((x_C+(x_C^2+y_C^2)^{1/2})/((x_C^2+y_C^2)^{1/2}+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1), y_H)$.
I has coordinates
$((2*y_C*y_H+x_C*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+1))/(2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}), (x_C^2 * y_C + y_C^3 + (x_C^2 + y_C^2)^{1/2} * (y_C - 2 * x_C * y_H) - y_C * (x_C^2 + y_C^2)^{1/2} * ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2})/(2 * x_C^2 + 2 * y_C^2))$.
J has coordinates
$(-(2 * y_C * y_H - ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2} * (x_C + 1) - x_C + (x_C^2 + y_C^2)^{1/2} * (x_C - 1) + 1)/(2 * ((x_C - 1)^2 + y_C^2)^{1/2}), ((y_C + y_H * (2 * x_C - 2) - y_C * (x_C^2 + y_C^2)^{1/2}) * (x_C^2 - 2 * x_C + y_C^2 + 1)^{1/2} + y_C^3 + y_C * (x_C^2 - 2 * x_C + 1))/(2 * x_C^2 - 4 * x_C + 2 * y_C^2 + 2))$.
Circle ADJ is given by the equation
$(x-((3*y_C^3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3-y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)+y_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(y-((x_C+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C*y_H-x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2+y_C*(y_C-2*y_H)-1)+x_C*y_C^2+x_C^3)-x_C^2-x_C^3+x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C+1)+y_C^2*(2*x_C-3)*(x_C+1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(-((3*y_C^3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3-y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)+y_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(-((x_C+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C*y_H-x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2+y_C*(y_C-2*y_H)-1)+x_C*y_C^2+x_C^3)-x_C^2-x_C^3+x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C+1)+y_C^2*(2*x_C-3)*(x_C+1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2 = 0$.
Circle BDI is given by the equation
$(x-(((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3+x_C*y_C*(x_C-2))-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2*y_C+y_C^3-2*x_C*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})+y_C^3+x_C*y_C*(x_C-4))/(4*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(y-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(x_C-2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*(y_C-2*y_H)+x_C*(x_C-2))-2*x_C^2+x_C^3)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(x_C-1)-2*y_C*y_H-3*x_C^2+x_C^3)+2*x_C^2-3*x_C^3+x_C^4+y_C^4+y_C^2*(2*x_C+1)*(x_C-2))/(4*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-(1-(((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3+x_C*y_C*(x_C-2))-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2*y_C+y_C^3-2*x_C*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})+y_C^3+x_C*y_C*(x_C-4))/(4*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(x_C-2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*(y_C-2*y_H)+x_C*(x_C-2))-2*x_C^2+x_C^3)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(x_C-1)-2*y_C*y_H-3*x_C^2+x_C^3)+2*x_C^2-3*x_C^3+x_C^4+y_C^4+y_C^2*(2*x_C+1)*(x_C-2))/(4*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2 = 0$.
Circle CDH is given by the equation
$(x-((y_H*(-2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*(2*x_C-1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C-y_H))+y_C*(2*x_C^2+2*x_C-1)+2*y_C^3+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1))/(y_C*(8*x_C-4))))^2+(y-(y_H/2+y_C/(2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+2)))^2-(x_C-((y_H*(-2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*(2*x_C-1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C-y_H))+y_C*(2*x_C^2+2*x_C-1)+2*y_C^3+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1))/(y_C*(8*x_C-4))))^2-(y_C-(y_H/2+y_C/(2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+2)))^2 = 0$.
The radical line between circles ADJ and BDI is given by the equation
$(x-((3*y_C^3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3-y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)+y_C*$

$(3*x_C+1)*(x_C-1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(y-((x_C+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C*y_H-x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2+y_C*(y_C-2*y_H)-1)+x_C*y_C^2+x_C^3)-x_C^2-x_C^3+x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C+1)+y_C^2*(2*x_C-3)*(x_C+1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(-((3*y_C^3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3-y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)+y_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(-((x_C+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C*y_H-x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2+y_C*(y_C-2*y_H)-1)+x_C*y_C^2+x_C^3)-x_C^2-x_C^3+x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C+1)+y_C^2*(2*x_C-3)*(x_C+1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((x-(((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3+x_C*y_C*(x_C-2))-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2*y_C+y_C^3-2*x_C*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})+y_C^3+x_C*y_C*(x_C-4))/(4*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2+(y-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(x_C-2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*(y_C-2*y_H)+x_C*(x_C-2))-2*x_C^2+x_C^3)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(x_C-1)-2*y_C*y_H-3*x_C^2+x_C^3)+2*x_C^2-3*x_C^3+x_C^4+y_C^4+y_C^2*(2*x_C+1)*(x_C-2))/(4*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-(1-(((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3+x_C*y_C*(x_C-2))-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2*y_C+y_C^3-2*x_C*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2})+y_C^3+x_C*y_C*(x_C-4))/(4*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2-(-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^2*(x_C-2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*(y_C-2*y_H)+x_C*(x_C-2))-2*x_C^2+x_C^3)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C+y_C^2*(x_C-1)-2*y_C*y_H-3*x_C^2+x_C^3)+2*x_C^2-3*x_C^3+x_C^4+y_C^4+y_C^2*(2*x_C+1)*(x_C-2))/(4*y_C*(y_C^2+x_C*(x_C-2)))))^2)=0$

$\Longrightarrow$

$((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x*(2*y_H*x_C^4-2*x_C^3*y_C-6*y_H*x_C^3+4*y_H*x_C^2*y_C^2+4*y_H*x_C^2-2*x_C*y_C^3-6*y_H*x_C*y_C^2+2*x_C*y_C+2*y_H*y_C^4)-2*y*y_C^4+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5-2*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*x*x_C+y*y_C-3*x*x_C^2-x*y_C^2+x_C*y_C^2+x_C*(x_C-1)*(x_C+1)-2*x_C*y*y_C)+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1)-2*y*y_C*y_H*(y_C^2+x_C*(x_C-2))-y*y_C^2*(2*x_C-2)*(x_C+1))+(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x*(2*y_H*x_C^4+2*x_C^3*y_C-2*y_H*x_C^3+4*y_H*x_C^2*y_C^2-6*x_C^2*y_C-2*y_H*x_C^2+2*x_C*y_C^3-2*y_H*x_C*y_C^2+4*x_C*y_C+2*y_H*x_C+2*y_H*y_C^4-2*y_C^3-2*y_H*y_C^2)+y_C^3*(-2*x_C^2+2*x_C+1)+2*y*y_C^4-y_C^5+y_H*(2*y_C*(y-y_C)-2*x_C*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2-1)+x_C*y*y_C^2*(2*x_C-4)-x_C*y_C*(x_C-1)*(x_C+1)*(x_C-2))+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5-2*x*y_C*(x_C^4-2*x_C^3+2*x_C^2*y_C^2+2*x_C^2-2*x_C*y_C^2-x_C+y_C^4)-y*y_C^2*(4*x_C-2)+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1)=0$

$\Longrightarrow$

$y=(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x*(2*y_H*x_C^4-2*x_C^3*y_C-6*y_H*x_C^3+4*y_H*x_C^2*y_C^2+4*y_H*x_C^2-2*x_C*y_C^3-6*y_H*x_C*y_C^2+2*x_C*y_C+2*y_H*y_C^4)+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5-2*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*x*x_C-3*x*x_C^2-x*y_C^2+x_C*y_C^2+x_C*(x_C-1)*(x_C+1))+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1))-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^5-y_C^3*(-2*x_C^2+2*x_C+1)-x*(2*y_H*x_C^4+2*x_C^3*y_C-2*y_H*x_C^3+4*y_H*x_C^2*y_C^2-6*x_C^2*y_C-2*y_H*x_C^2+2*x_C*y_C^3-2*y_H*x_C*y_C^2+4*x_C*y_C+2*y_H*x_C+2*y_H*y_C^4-2*y_C^3-2*y_H*y_C^2)+y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2-1)+x_C*y_C*(x_C-1)*(x_C+1)*(x_C-2))+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5-2*x*y_C*(x_C^4-2*x_C^3+2*x_C^2*y_C^2+2*x_C^2-2*x_C*y_C^2-x_C+y_C^4)+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1))/(y_C^2*(4*x_C-2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C^4+2*y_C*y_H*(x_C^2+y_C^2-1)+x_C*y_C^2*(2*x_C-4))+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C^4+2*y_C*y_H*(y_C^2+x_C*(x_C-2))+y_C^2*(2*x_C-2)*(x_C+1)+2*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C-2*x_C*y_C))).$

The radical line between circles ADJ and CDH is given by the equation

$(x-((3*y_C^3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3-y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-2)+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)+y_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2+(y-((x_C+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C*y_H-x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2+y_C*(y_C-2*y_H)-1)+x_C*y_C^2+x_C^3)-x_C^2-x_C^3+x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C+1)+y_C^2*(2*x_C-3)*(x_C+1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(-((3*y_C^3-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))+y_C^3-y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*$

$(2*x_C-2)+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)+y_C*(3*x_C+1)*(x_C-1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-(-((x_C+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C*y_H-x_C-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x_C^2+y_C*(y_C-2*y_H)-1)+x_C*y_C^2+x_C^3)-x_C^2-x_C^3+x_C^4+y_C^4-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C-1)^2+y_C^2)*(x_C+1)+y_C^2*(2*x_C-3)*(x_C+1))/(4*y_C*(x_C^2+y_C^2-1))))^2-((x-((y_H*(-2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*(2*x_C-1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C-y_H))+y_C*(2*x_C^2+2*x_C-1)+2*y_C^3+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1))/(y_C*(8*x_C-4))))^2+(y-(y_H/2+y_C/(2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+2)))^2-(x_C-((y_H*(-2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*(2*x_C-1)-2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C-y_H))+y_C*(2*x_C^2+2*x_C-1)+2*y_C^3+y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1))/(y_C*(8*x_C-4))))^2-(y_C-(y_H/2+y_C/(2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}+2*((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}+2)))^2)=0$

$\Longrightarrow$

$((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x*(-2*x_C^2*y_C+6*y_H*x_C^2-6*y_H*x_C-2*y_C^3+2*y_H*y_C^2+2*y_C)-y_H*(2*y_C*(y-2*x_C*y+x_C*y_C)+2*x_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C^3+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y*y_C*y_H*(4*x_C-2)-x*y_H*(4*x_C-2)*(y_C^2+x_C*(x_C-1)))-x*(2*x_C^4*y_C+2*y_H*x_C^4-4*x_C^3*y_C-2*y_H*x_C^3+4*x_C^2*y_C^3+4*x_C^2*y_C-2*y_H*x_C^2-4*x_C*y_C^3-2*y_H*x_C*y_C^2-2*x_C*y_C+2*y_H*x_C+2*y_C^5-2*y_H*y_C^4+2*y_H*y_C^2)+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5+y_H*(2*x_C^2*(x_C-1)-2*y_C*(y*(2*x_C-1)-y_C*(x_C-1)))*(x_C^2+y_C^2-1)-y*y_C^2*(4*x_C-2)-y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1)*(x*(2*x_C-2)-x_C^2+y_C*(2*y-y_C)+1)+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1)=0$

$\Longrightarrow$

$y=(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x*(-2*x_C^2*y_C+6*y_H*x_C^2-6*y_H*x_C-2*y_C^3+2*y_H*y_C^2+2*y_C)-y_H*(2*x_C*y_C^2+2*x_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C^3+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))-x*y_H*(4*x_C-2)*(y_C^2+x_C*(x_C-1)))-x*(2*x_C^4*y_C+2*y_H*x_C^4-4*x_C^3*y_C-2*y_H*x_C^3+4*x_C^2*y_C^3+4*x_C^2*y_C-2*y_H*x_C^2-4*x_C*y_C^3-2*y_H*x_C*y_C^2-2*x_C*y_C+2*y_H*x_C+2*y_C^5-2*y_H*y_C^4+2*y_H*y_C^2)+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5+y_H*(2*x_C^2*(x_C-1)+2*y_C^2*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2-1)-y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1)*(x*(2*x_C-2)-x_C^2-y_C^2+1)+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1))/(y_C^2*(4*x_C-2)-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*y_H*(4*x_C-2)+2*y_C*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1))+2*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1)+2*y_C*y_H*(2*x_C-1)*(x_C^2+y_C^2-1)).$

We then see these represent the same line since we calculate

$(((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(x*(2*y_H*x_C^4-2*x_C^3*y_C-6*y_H*x_C^3+4*y_H*x_C^2*y_C^2+4*y_H*x_C^2-2*x_C*y_C^3-6*y_H*x_C*y_C^2+2*x_C*y_C+2*y_H*y_C^4)+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5-2*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(3*x*x_C-3*x*x_C^2-x*y_C^2+x_C*y_C^2+x_C*(x_C-1)*(x_C+1))+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1))-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C^5-y_C^3*(-2*x_C^2+2*x_C+1)-x*(2*y_H*x_C^4+2*x_C^3*y_C-2*y_H*x_C^3+4*y_H*x_C^2*y_C^2-6*x_C^2*y_C-2*y_H*x_C^2+2*x_C*y_C^3-2*y_H*x_C*y_C^2+4*x_C*y_C+2*y_H*x_C+2*y_H*y_C^4-2*y_C^3-2*y_H*y_C^2)+y_H*(2*y_C^2+2*x_C*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2-1)+x_C*y_C*(x_C-1)*(x_C+1)*(x_C-2))+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5-2*x*y_C*(x_C^4-2*x_C^3+2*x_C^2*y_C^2+2*x_C^2-2*x_C*y_C^2-x_C+y_C^4)+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1))/(y_C^2*(4*x_C-2)-(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C^4+2*y_C*y_H*(x_C^2+y_C^2-1)+x_C*y_C^2*(2*x_C-4))+((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(2*y_C^4+2*y_C*y_H*(y_C^2+x_C*(x_C-2))+y_C^2*(2*x_C-2)*(x_C+1)+2*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C-2*x_C*y_C)))-((((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*((x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(x*(-2*x_C^2*y_C+6*y_H*x_C^2-6*y_H*x_C-2*y_C^3+2*y_H*y_C^2+2*y_C)-y_H*(2*x_C*y_C^2+2*x_C*(x_C-1)*(x_C+1))+y_C^3+y_C*(x_C-1)*(x_C+1))-x*y_H*(4*x_C-2)*(y_C^2+x_C*(x_C-1)))-x*(2*x_C^4*y_C+2*y_H*x_C^4-4*x_C^3*y_C-2*y_H*x_C^3+4*x_C^2*y_C^3+4*x_C^2*y_C-2*y_H*x_C^2-4*x_C*y_C^3-2*y_H*x_C*y_C^2-2*x_C*y_C+2*y_H*x_C+2*y_C^5-2*y_H*y_C^4+2*y_H*y_C^2)+y_C^3*(2*x_C^2-1)+y_C^5+y_H*(2*x_C^2*(x_C-1)+2*y_C^2*(x_C-1))*(x_C^2+y_C^2-1)-y_C*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1)*(x*(2*x_C-2)-x_C^2-y_C^2+1)+x_C^2*y_C*(x_C-1)*(x_C+1))/(y_C^2*(4*x_C-2)-((x_C-1)^2+y_C^2)^{1/2}*(y_C*y_H*(4*x_C-2)+2*y_C*y_H*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*$

$x_C-1))+2*y_C^2*(x_C^2+y_C^2)^{1/2}*(2*x_C-1)+2*y_C*y_H*(2*x_C-1)*(x_C^2+y_C^2-1))) = 0$
as desired. □

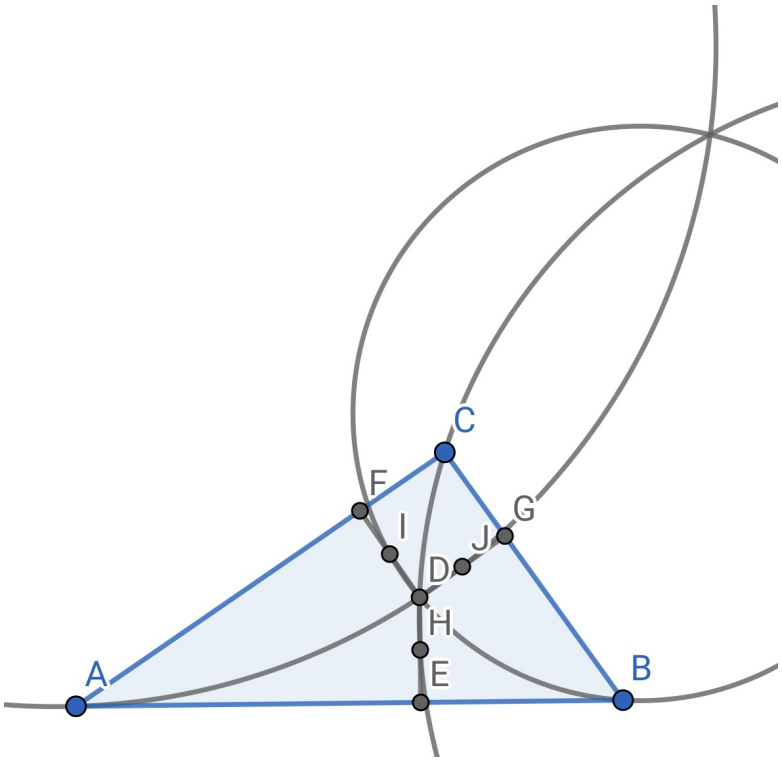

Figure 1. Illustration.

References

[1] Weisstein, Eric W. "Coaxal Circles." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/CoaxalCircles.html